2 ТҰТАС ОРТА ДЕФОРМАЦИЯСЫ

Тұтас орта қозғалысының бірнеше айрықша ерекшеліктері бар. Абсолют қатты денеде сол денені құрайтын бөлшектердің салыстырмалы қозғалысы болмайды. Тұтас ортада бөлшектердің салыстырмалы қозғалысы болғандықтан, бөлшектердің ара қашықтығы өзгеріп тұрады. Бұл құбылыс ортаның деформациялануы делінеді.

Әрбір бөлшектің маңындағы ортаның деформациясын екінші рангілі тензордың көмегімен толық сипаттауға болады.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - \overset{o}{g}_{ij} \right). \qquad (2.1)$$

Ортаның деформациясы бөлшектердің арасындағы қашықтықтың өзгерісіне байланысты болғандықтан, деформация өлшемі ретінде мына айырым алынады

$$ds^2 - ds'^2 = 2\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j . \qquad (2.2)$$

Ескерте кететін жәйт, деформация тензоры қатты дене деформациясының физикалық характеристикасы болып табылады, өйткені дененің әртүрлі бөліктерінің арасындағы өзара әсер күші, осы бөлшектердің өзара орын ауыстыруымен анықталады.

Сұйық және газ тәрізді денелерде өзара әсер күші орын ауыстырудың өзімен емес, олардың жылдамдықтарымен анықталады, сондықтан сұйықтар мен газдар механикасында деформация тензорының орнына деформация жылдамдығының тензорын қарастырады.

Орын ауыстыру векторының компоненттері арқылы деформация тензорын өрнектеу

Бастапқы күй реал орындалатын және оның метрикасы $\overset{o}{g}_{ij}$, евклид метрикасы $\hat{g}_{ij}$ болып табылатын күйді қарастырайық. Бұл жағдайда орын ауыстыру векторын $\vec{w}$, атап айтқанда, $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{w}$ енгізуге болады. Мұндағы $\vec{r}_o, \vec{r}$ - бастапқы t_0 және берілген t уақыт мезетіне сәйкес, тұтас ортаның бір

ғана М нүктесінің x^1, x^2, x^3 -ке қатысты есептеу жүйесінің радиус – векторлары. Төмендегі өрнекті алу қиын емес

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \xi^i} = \hat{\vec{э}}_i - \overset{o}{\vec{э}}_i$$

бұдан $\hat{\vec{э}}_i = \overset{o}{\vec{э}}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}$ немесе $\overset{o}{\vec{э}}_i = \hat{\vec{э}}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}$,

сондықтан

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\vec{э}}_i \hat{\vec{э}}_j = \overset{o}{\vec{э}}_i \overset{o}{\vec{э}}_j + \overset{o}{\vec{э}}_i \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \overset{o}{\vec{э}}_j \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}$$

және

$$\overset{o}{g}_{ij} = \overset{o}{\vec{э}}_i \overset{o}{\vec{э}}_j = \hat{\vec{э}}_i \hat{\vec{э}}_j + \hat{\vec{э}}_i \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \hat{\vec{э}}_j \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}$$

олай болса,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - \overset{o}{g}_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left[\overset{o}{\vec{э}}_i \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \overset{o}{\vec{э}}_j \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{\vec{э}}_j \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \hat{\vec{э}}_i \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}\right], \qquad (2.3)$$

мұндағы $\vec{w}$-ден ξ^i координатасы бойынша алынған бірінші реттік туынды тұтас орта нүктесінің салыстырмалы орын ауыстыруын сипаттайды.

Орын ауыстыру векторын $\vec{w}$, актуальді кеңістікке $\hat{\vec{э}}_l$, сол сияқты бастапқы кеңістікке $\overset{o}{\vec{э}}_l$ жіктеуге және соған сәйкес $\vec{w}$ вектордың екі сортты компоненттерін ендіруге болады

$$\vec{w} = \hat{w}^k \hat{\vec{э}}_k = \overset{o}{w}{}^k \overset{o}{\vec{э}}_k$$

сонымен қатар екі сортты ковариантты туындыны да енгізуге болады

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^k} = \overset{o}{\nabla}_k \overset{o}{w}{}^k \overset{o}{\vec{э}}_k \quad \text{және} \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^k} = \hat{\nabla}_k \hat{w}^k \hat{\vec{э}}_k . \qquad (2.4)$$

(3.16)- дағы бірінші өрнекті (3.15)-ке қойып мынаны аламыз

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\left(\overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}^k\right)\overset{o}{g}_{ki} + \left(\overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}^k\right)\overset{o}{g}_{kj} + \left(\overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}^k \overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}^e\right)\overset{o}{g}_{ke}\right].$$

Метрикалық тензордың компоненттерін, нәтижені өзгертпей, ковариантты туындының астына енгізуге болады, сонда

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}_i + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_j + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_k \overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}^k\right]. \qquad (2.5)$$

Сол сияқты (2.4)- тегі екінші өрнекті (2.3)-ке қойып

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j - \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \hat{\nabla}_j \hat{w}^k\right] \qquad (2.6)$$

аламыз.

Шексіз аз салыстырмалы орын ауыстыру жағдайында $\vec{w}$ бойынша квадраттық мүшелерді ескермесек

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\overset{o}{\nabla}_j \overset{o}{w}_i + \overset{o}{\nabla}_i \overset{o}{w}_j\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j\right]. \qquad (2.7)$$

Декарттық координаттар жүйесінде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_j}{\partial x^i} + \frac{\partial w_i}{\partial x^j}\right). \qquad (2.8)$$

Мынадай матрицаны алайық $c = \|c_{ij}\| = \|\lambda\delta_{ij} - \varepsilon_{ij}\|$, мұндағы λ- белгілі бір сандық параметр және оны да матрица деп түсінеміз

$$\left\|\lambda\delta_{ij} - \hat{\varepsilon}_{ij}\right\|, \text{ сол сияқты } \left\|\lambda\delta_{ij} - \overset{o}{\varepsilon}_{ij}\right\|.$$

Бас осьтегі матрицаның түрі

$$C^* = \begin{Vmatrix} \lambda - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \varepsilon_3 \end{Vmatrix}.$$

Егер детерминатты нольге теңестірсек, λ-ға қатысты кубтық теңдеуді аламыз

$$(\lambda - \varepsilon_1)(\lambda - \varepsilon_2)(\lambda - \varepsilon_3) = 0$$

немесе

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0,$$

мұндағы

$J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $J_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$, $J_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ деформация тензорының бірінші, екінші, үшінші инварианттары, бұл теңдеудің түбірлері $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ деформация тензорына сәйкес $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ бас компоненттер болып табылады.

ds және ds_0 сызықтық элементтердің актуальді және «бастапқы» күйлердегі сәйкестігін зерттегеннен кейін, осы күйдегі элементар көлемдердің сәйкестігін табамыз. Деформация тензорының бас осінен бастапқы күйдегі қабырғалары ds_{01}, ds_{02}, ds_{03}, көлемі $dV_0 = ds_{01}ds_{02}ds_{03}$ формуласымен анықталатын элементар тік бұрышты параллелепипедті алайық. Оның қозғалысына тік бұрышты параллелепипедтің көлемі сәйкес келеді

$$dV = ds_{01}ds_{02}ds_{03}.$$

Көлемнің салыстырмалы өзгерісінің шамасын θ көлемдік ұлғаю коэффициенті деп атайды

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \left(\frac{ds_1}{ds_{01}}\right)\left(\frac{ds_2}{ds_{02}}\right)\left(\frac{ds_3}{ds_{03}}\right) - 1.$$

$ds_i^2 - ds_{oi}^2 = 2\overset{o}{\varepsilon}_i\, ds_{oi}^2$ болғандықтан, θ түрін басқаша жазуға болады

$$\theta = \sqrt{\left(1+2\overset{o}{\varepsilon}_i\right)\left(1+2\overset{0}{\varepsilon}_2\right)\left(1+2\overset{o}{\varepsilon}_3\right)} - 1 \qquad (2.9)$$

немесе

$$\theta = \sqrt{1+2\overset{o}{J}_1 + 4\overset{o}{J}_2 + 8\overset{o}{J}_3} - 1.$$

θ шамасы инвариантты геометриялық характеристика ретінде анықталады. Шексіз аз деформация кезінде мынаны аламыз

$$\theta \approx J_1 = \sum \hat{\varepsilon}_i = \sum \overset{o}{\varepsilon}_i . \qquad (2.10)$$

Деформациялар жылдамдықтарының тензоры

Орын ауыстыру $\vec{w}$ векторы t мезгіліндегі күйді, $t+\Delta t$ мезгіліндегі күймен байланыстырады. Шынында да, $\vec{w} = w_i \hat{\vec{э}}^i = \vec{v}\Delta t = v_i \hat{\vec{э}}^i \Delta t$, мұндағы $w_i = v_i \Delta t$ -нің реті Δt - мен шамалас, егер Δt аз болса, онда орын ауыстыру да шексіз аз болады.

Сондықтан

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) = e_{ij},$$

мұндағы e_{ij} - деформациялар жылдамдықтарының тензоры деп аталынатын симметриялық тензордың компоненттері болып табылады.

Егер жылдамдықтар өрісі $\vec{v}$ белгілі болса, онда e_{ij} компоненттерін келесі формуламен есептеуге болады

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right). \qquad (2.11)$$

(2.11)-де көрсетілгендей, деформациялар жылдамдықтары тензорының компоненттері үшін, ілеспелі координаттар жүйесінде төменгі формула дұрыс

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{d\hat{g}_{ij}}{dt}.. \qquad (2.12)$$

Егер «бастапқы күй» $\overset{o}{g}_{ij}$ уақытқа тәуелсіз болса, онда деформациялар тензорының компоненттері және ілеспелі координаттар жүйесіндегі деформациялар жылдамдықтарының тензоры төмендегі қатынаспен байланысады

$$\hat{e}_{ij} = \frac{d\hat{\varepsilon}_{ij}}{dt}.. \qquad (2.13)$$

Деформациялар жылдамдықтары тензорының компоненттерінің физикалық мағынасы мынадай. Диагональ компоненттері e_{ii} тұтас орта кесіндісінің салыстырмалы ұзару жылдамдығын, ал диагональ емес компоненттері e_{ij} алғашқы тік бұрыштардың қиғаштану жылдамдықтарын сипаттайды.

Орта бөлшектерінің маңындағы жылдамдықтардың таралуы. Коши-Гельмгольц теоремасы

Ортаның бөлшектерімен толтырылған тұтас ортаның шексіз аз көлемін dV деп алайық. Әрбір бөлшекке әртүрлі уақыт мезгілінде жылдамдық беруге болады, яғни dV көлемінде үздіксіз деп есептелетін $\vec{v}$ жылдамдық және оның үздіксіз туындысы бар болады. M_0 нүктесінің радиус-векторы – $\vec{r}_o$, ал $\vec{r}$ – M нүктесінікі, онда

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_o.$$

Кез келген (M) нүктесінің қозғалыс жылдамдығын $\vec{v}$, оған сыбайлас M_0 нүктесінің қозғалыс жылдамдығын $\vec{v}_0$ арқылы өрнектейік. Ол үшін M нүктесінің маңындағы жылдамдықты $\vec{v}$ Тейлор қатарына жіктейік.

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\xi^i}\right)_0 \Delta r^i + 0\left(\Delta r^2\right)$$

Немесе

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \nabla_i v_j\ \vec{э}^j\ \Delta r_i = \vec{v}_o + e_{ij}\ \vec{э}^j\ \Delta r^i + \omega_{ij}\ \vec{э}^j\ \Delta r^i. \qquad (2.14)$$

Соңғы формуладағы e_{ij} және ω_{ij} -сәйкес симметриялық және антисимметриялық тензорлар,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right), \ . \qquad (2.15)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i\right).. \qquad (2.16)$$

.

Коши-Гельмгольц теоремасы: «Тұтас ортаның элементар көлемінің кез келген қозғалысын берілген мезгілде екі қозғалыстың қосындысының нәтижесі деп қарастыруға болады: квазиқатты және деформациялы қозғалыстар», атап айтқанда

$$\vec{v} = \vec{v}_{к\ .} + \vec{v}_{деф.} = \vec{v}_{o} + \vec{v}_{айнал.} + \vec{v}_{деф.}. \qquad (2.17)$$

Есептер мен жаттығулар

Деформация тензоры. Деформация жылдамдығының тензоры. Құйын тензоры.Екінші рангілі тензордың бас (негізгі) мәндері. мен бас бағыттары (осьтері).

2.1. Орын ауыстыру өрісі берілген

$$w_1 = 3x_1x_2^2,$$

$$w_2 = 2x_3x_1,$$

$$w_3 = x_3^2 - x_1x_2.$$

а) қозғалыс заңдылығын анықтаңыз;

ә) Деформация тензорының компоненттерін табыңыз.

2.2. Сызықтық деформация төмендегідей арақатынастармен берілген.

$$w_1 = 4x_1 - x_2 + 3x_3,$$

$$w_2 = x_1 + 7x_2,$$

$$w_3 = -3x_1 + 4x_2 + 4x_3.$$

а) қозғалыс заңдылығын анықтаңыз;
ә) Деформация тензорының компоненттерін табыңыз.

2.3. Денемен тіркестірілген ξ_i және кеңістіктегі осьтер x_i -мен салыстырғанда тұтас ортаның орын ауыстыру өрісі берілген.

$$x_1 = \xi_1,$$

$$x_2 = \xi_2 + A\xi_3,$$

$$x_3 = \xi_3 + A\xi_2$$

$$(A = const).$$

а) Орын ауыстыру векторының компоненттері анықтаңыз;
ә) Деформация тензоры компоненттерін табыңыз.

2.4. Орын ауыстыру векторының өрісінде

$$\vec{w}_1 = (3\xi_2 - 4\xi_3)i + (2\xi_1 - \xi_3)\vec{j} + (4\xi_2 - \xi_1)\vec{k}.$$

а) Тұтас ортаның белгілі бір көлемі орын ауыстырсын делік. Материалдық және кеңістіктік осьтер бір-бірімен беттеседі деп есептеп, A(1,0,3) және B (3,6,6) бөлшектерін қосатын вектордың ығысқан орнын анықтаңыз;
ә) Қозғалыс заңдылығын анықтаңыз;
б) Деформация тензорының компоненттерін табыңыз.

2.5. Деформация тензоры берілген:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Деформация тензорының бас мәндері мен бас бағыттарын (осьтерін) анықта.

Шешуі. Симметриялық деформация тензорының бас мәндері келесі теңдеудің түбірлері болып табылады.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ 3 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 - 4\lambda + 32 = 0 .$$

Бұдан бас мәндері табылады:

$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 8,$

ал бас бағыттары:

$n_1^{(1)} = 1/\sqrt{2}, \quad n_2^{(1)} = -1/\sqrt{2}, \quad n_3^{(1)} = 0,$

$n_1^{(2)} = 1/\sqrt{3}, \quad n_2^{(2)} = 1/\sqrt{3}, \quad n_3^{(2)} = 1/\sqrt{3},$

$n_1^{(3)} = -1/\sqrt{6}, \quad n_2^{(3)} = -1/\sqrt{6}, \quad n_3^{(3)} = 2/\sqrt{6}.$

2.6. Ортаның орын ауыстыру векторының түрі төмендегідей:

$$w_1 = ax_1 \sin kt,$$

$$w_2 = \frac{a \sin kt}{1 + a \sin kt} x_2,$$

$$w_3 = 0.$$

Деформация тензорының компоненттерін анықтаңыз және қозғалыс барысындағы ортаның элементар көлемінің өзгерісін табыңыз.

2.7. Деформация тензоры ε_{ij} берілген:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Деформация тензорының бас мәндері мен бас бағыттарын табыңыз.

2.8. Деформация тензоры ε_{ij} берілген:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Деформация тензорының бас мәндері мен бас бағыттарын табыңыз.

2.9. Жылдамдық өрісі Эйлер айнымалылары арқылы берілген

$$v_1 = \frac{\left[a(1-at)+b^2t\right]x_1 - bx_2}{1+\left(b^2-a^2\right)t^2},$$

$$v_2 = \frac{bx_1 - \left[a(1-at)-b^2t\right]x_2}{1+\left(b^2-a^2\right)t^2},$$

$$v_3 = \frac{cx_3}{1+ct},$$

мұндағы a, b, және c – тұрақтылар. Үдеу және орын ауыстыру өрістерін, деформация тензорын ε_{ij} табыңыз.

Шешімі. бастапқы $t = 0$ уақыт мезетінде $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ координатасында орналасқан бөлшек қозғалысын бақылайтын болсақ, онда ол бөлшектің $x_i = x_i(\xi_k, t)$ қозғалыс заңдылығы, мына $x_i(\xi_k, 0) = \xi_i$ шарты орындалған жағдайда, келесі есептің шешімінен табылады:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\left[a(1-at)+b^2t\right]x_1 - bx_2}{1+\left(b^2-a^2\right)t^2},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{bx_1 - \left[a(1+at) + b^2 t\right]x_2}{1 + \left(b^2 - a^2\right)t^2},$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{cx_3}{1+ct},$$

Осы теңдеулерді қолдана отырып, үдеу векторының компоненттерін анықтаймыз

$$a_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0,$$

$$a_2 = \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0,$$

$$a_3 = \frac{d^2 x_3}{dt^2} = 0,$$

яғни, қарастырылып отырған қозғалыс жағдайында үдеу өрісі болмайды.

Бұл жағдай қозғалыс заңдылығын оңай табуға, яғни берілген есептің шешімін табуға мүмкіндік береді. Бастапқы $t = 0$ уақыт мезетінде қарастырылып отырған $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ бөлшектің жылдамдық векторының компоненттері

$$v_1(\xi_k, 0) = a\xi_1 - b\xi_2,$$

$$v_2(\xi_k, 0) = b\xi_1 - a\xi_2,$$

$$v_3(\xi_k, 0) = b\xi_1 - c\xi_3.$$

Осы бөлшектің қозғалысын одан әрі қарастырсақ $a_i = 0$ шартынан оның жылдамдығының тұрақты болып қалатындығы шығады.

Бұдан бөлшектің қозғалыс заңдылығы табылады:

$$x_1 = \xi_1 + t(a\xi_1 - b\xi_2),$$

$$x_2 = \xi_2 + t(b\xi_1 - a\xi_2),$$

$$x_3 = \xi_3 + ct\ \xi_3.$$

Сонымен, орын ауыстыру векторы мен деформация тензорларының компоненттері декарттық координаталар жүйесінде мына түрде анықталады

$$w_1 = t(a\xi_1 - b\xi_2),$$

$$w_2 = t(b\xi_1 - a\xi_2),$$

$$w_3 = ct\,\xi_3;$$

$$\varepsilon_{11} = t\left(a + \frac{a^2 + b^2}{2}t\right),$$

$$\varepsilon_{22} = t\left(-a + \frac{a^2 + b^2}{2}t\right),$$

$$\varepsilon_{33} = ct\left(1 + \frac{1}{2}ct\right),$$

$$\varepsilon_{12} = -abt^2,\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

2.10. Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық өрісі төмендегідей түрде берілген

$$v_1 = -kx_2,$$

$$v_2 = kx_1,$$

$$v_3 = 0$$

$$(k = const).$$

Деформация тензоры компоненттерін анықтаңыз.

2.11. Тұтас ортаның қозғалыс заңы

$$x_1 = \xi_1,$$

$$x_2 = (\xi_1 + \xi_2)e^t - \xi_1,$$

$$x_3 = (\xi_1 + \xi_2)e^{-t} - \xi_1.$$

а) Орын ауыстыру векторының компоненттерін есептеңіз;
ә) Деформация тензорының компоненттерін анықтаңыз;
б) Деформация жылдамдығы тензорының компоненттерін табыңыз.

2.12. Тұтас орта қозғалысы төмендегі теңдеулер арқылы берілген

$$x_1 = \xi_1,$$

$$x_2 = \xi_2 + \xi_1\left(e^{-2t} - 1\right),$$

$$x_3 = \xi_3 + \xi_1\left(e^{-3t} - 1\right)$$

а) Орын ауыстыру векторының компоненттерін есептеңіз;
ә) Деформация тензорының компоненттерін анықтаңыз.
б) Деформация жылдамдығы тензорының компоненттерін табыңыз.

2.13. Стационар жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = 2x_1,$$

$$v_2 = 2x_2,$$

$$v_3 = 0.$$

а) Қозғалыс заңдылығын анықтаңыз;
ә) орын ауыстыру векторының компоненттерін есептеңіз;
б) Деформация тензорының компоненттерін анықтаңыз;
в) Деформация жылдамдығы тензорының компоненттерін
және оның негізі (бас) мәндерін табыңыз.

2.14. Стационар жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = x_1^2 x_2 + x_2^2,$$

$$v_2 = -x_1^2 - x_1 x_2^2,$$

$$v_3 = 0.$$

а) деформация жылдамдығы тензорының компоненттерін табыңыз.
ә) деформация жылдамдығы тензорының бас мәндерін анықтаңыз.

2.15. Жылдамдық өрісі төмендегідей түрде берілген:

$$v_1 = a_1(t)x_1,$$

$$v_2 = a_2(t)x_2,$$

$$v_3 = a_3(t)x_3.$$

Деформация жылдамдығы тензорының компоненттерін анықтаңыз.

2.16. Белгілі бір ағынның жылдамдық өрісі берілген:

$$v_1 = 0,$$

$$v_2 = a\left(x_1 x_2 - x_3^2\right)e^{-bt},$$

$$v_3 = a\left(x_2^2 - x_1 x_3\right)e^{-bt},$$

мұндағы a және b - тұрақтылар.
а) Осы қозғалыс үшін жылдамдық градиентін табыңыз;
ә) $t = 0$ уақыт мезетіндегі $P(1,0,3)$ нүктесіндегі деформация жылдамдығы тензорының компоненттерін есептеп шығарыңыз.

2.17. Эйлер айнымалылары арқылы өрнектелген жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = a(t)x_2, \; v_2 = v_3 = 0.$$

Деформация жылдамдығы тензорының компоненттерін анықтаңыз.

2.18. Декарт координаттар жүйесіндегі деформация жылдамдығы тензоры e_{ij}-дің компоненттері берілген

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Деформация жылдамдығы тензорының бас мәндерін және бас бағыттарын (осьтерін) табыңыз.

2.19. Декарт координаттар жүйесіндегі деформация жылдамдығы тензоры e_{ij} компоненттері берілген

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Деформация жылдамдығы тензорының бас мәндерін және бас бағыттарын (осьтерін) табыңыз.

2.20. Ортаның жылдамдық өрісі берілген

$$v_1 = -A\left(x_1^3 + x_1 x_2^3\right) e^{-kt},$$

$$v_2 = A\left(x_1^2 x_2 + x_2^3\right) e^{-kt},$$

$$v_3 = 0.$$

а) үдеу векторының компоненттерін есептеңіз;
ә) Деформация жылдамдығы тензорының компоненттерін табыңыз;
б) Ағын сызығын анықтаңыз;
в) A(1,1,0); B(1,2,0); C(1,3,0) нүктелерінен өтетін ағын сызықтарының графиктерін тұрғызып, қорытынды жасаңыз.

ҰСЫНЫЛАТЫН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

Негізгі:

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. Т.1. 6-е изд. стер. - СПб.: Издательство "Лань", 2004. -528 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература).

2. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. Т.2. 6-е изд. стер. -СПб.: Издательство "Лань", 2004. -560с. - (Учебники для вузов. Специальная литература).

3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учебник для вузов. 7-е изд. испр. - М.: Дрофа, 2003.-840с.

4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред: М.: Изд-во ЛКИ. 2007. - 320 с.

5. Ершина А.Қ., Шериазданов Ғ.Б. Тұтас орта механикасы-ның теориялық негіздері және классикалық модельдері. Оқулық. / Жалпы ред. басқ. Ш.Ә. Ершин. – Алматы: Қазақ университеті, 2005.– 167 б.

6. Искакбаев А. Деформацияланатын қатты дене механикасының негіздері – Алматы: Қазақ университеті, 2007.- 175 б.

7. Тұтас орта механикасы бойынша тест сұрақтары: Оқу - әдістемелік құралы / құраст.: Искакбаев А.И., Қалтаев А., Туралина Д.Е., Шерьязданов Г.Б.- Алматы: Қазақ университеті, 2015.- 120 бет.

Қосымша:

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды: М.: МГУ, 1990.-310 с.

2. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по МСС: М.: МГУ, 1979. -200 с.

3. Шерьязданов Г.Б. Модели механики сплошной среды. Учебное пособие: Алматы. : Қазақ университеті, 2007.- 188 с.

4. Шерьязданов Г.Б. Задачи и упражнения по механике сплошной среды: Учебное пособие. – Алматы: Қазақ университеті, 2008.-68с.

5. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред: Учебник для втузов. – 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. - 376 с.

6. J.H.Spurk. Fluid Mechanics.Problems and solutions. – Springer, 1997. – 600p.

7. Қалтаев А., Бекбауов Б.Е., Алибаева Қ. Сұйық және газ механикасынан есептер жинағы: Оқу құралы - Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 178 бет.

Оқу –әдістемелік құралы

Д.Е.Туралина., Г.Б. Шерьязданов

Алматы
«Қазақ университеті»